ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ TRÍ HÀO

VỀ TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC NHIỀU BIẾN TRÊN TRƯỜNG THỰC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ TRÍ HÀO

VỀ TẬP NGHIỆM CỦA ĐA THỨC NHIỀU BIẾN TRÊN TRƯỜNG THỰC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN - 2017

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, tôi được nhận đề tài nghiên cứu "Về tập nghiệm của đa thức nhiều biến trên trường thực" dưới sự hướng dẫn của GS.TS Lê Thị Thanh Nhàn. Đến nay, luận văn đã được hoàn thành. Có được kết quả này là do sự dạy bảo và hướng dẫn hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo và Khoa Toán - Tin của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại Trường và trong thời gian nghiên cứu hoàn thành luận văn này.

Tôi xin cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Lạng Sơn, Trường THPT Vũ Lễ nơi tôi đang công tác đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K9A (Khóa 2015-2017) đã quan tâm, tạo điều kiện, cổ vũ và động viên để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 19 tháng 5 năm 2017

Mục lục

Lời mở đầu

Bài toán xác định mối quan hệ giữa các nghiệm và các nhân tử của một đa thức là một bài toán được nhiều nhà toán học quan tâm. Cho $\mathbb{K}$ là một trường. Chú ý rằng nếu $a \in \mathbb{K}$ là một nghiệm của $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ thì $x - a$ là một nhân tử của $f(x)$. Do đó, nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai đa thức với hệ số trên $\mathbb{K}$ có cùng tập nghiệm thì ước chung lớn nhất $d(x) = \gcd(f, g)$ cũng có tập nghiệm trùng với tập nghiệm chung của f và g. Mục đích của luận văn này này là mở rộng kết quả trên cho trường hợp nhiều biến. Cụ thể, chúng tôi quan tâm đến bài toán sau.

Cho f, g là hai đa thức n biến với hệ số trên một trường $\mathbb{K}$ sao cho f, g có cùng tập nghiệm trong $\mathbb{K}^n$. Tìm điều kiện để tồn tại một ước chung d của f và g sao cho f, g, d có cùng tập nghiệm.

Luận văn gồm 2 chương. Chương 1 tập trung trình bày kiến thức chuẩn bị về đa thức một biến, đa thức nhiều biến, đa thức thuần nhất, tập nghiệm của họ đa thức, iđêan trong vành đa thức, đồng thời nêu lại chứng minh hai định lý của Hilbert là Định lý cơ sở Hilbert và Định lý không điểm Hilbert. Định lý cơ sở Hilbert cho phép quy mỗi tập đại số về tập nghiệm của hữu hạn đa thức và Định lý không điểm Hilbert là sự tổng quát của Định lý cơ bản của Đại số. Chương 2 là nội dung chính của luận văn, chương này trình bày bài toán về hai đa thức có cùng tập nghiệm.

Tài liệu tham khảo chính của luận văn bài báo [3] của M. Balaich và M. Cocos và bài báo [2] của R. M. Aron and P. Hajek. Ngoài ra còn tham khảo hai cuốn sách [1,4].

Trong luận văn này luôn giả thiết V là một vành giao hoán có đơn vị và $\mathbb{K}$ là một trường. Ta ký hiệu $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ lần lượt là tập số nguyên dương, tập các số nguyên không âm, trường các số thực, trường các số phức, $V[x]$, $\mathbb{K}[x]$, $V[x_1, ..., x_n]$, $\mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ lần lượt vành đa thức một biến trên V, $\mathbb{K}$, vành đa thức n biến trên V và trên $\mathbb{K}$.

Do thời gian thực hiện luận văn không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm luận văn không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc. Xin chân thành cảm ơn!

Tác giả

Chương 1

Định lý cơ sở Hilbert và Định lý không điểm Hilbert

Trong chương này ta luôn giả thiết V là một vành giao hoán, $\mathbb{K}$ là một trường. Kí hiệu $\mathbb{N}$ là tập các số nguyên dương và $\mathbb{N}_0$ là tập các số nguyên không âm. Trong chương này chúng tôi tập trung trình bày kiến thức chuẩn bị về đa thức như đa thức một biến, đa thức nhiều biến, đa thức thuần nhất, tập nghiệm của họ đa thức, iđêan trong vành đa thức, đồng thời nêu lại chứng minh hai định lý của Hilbert là Định lý cơ sở Hilbert và Định lý không điểm Hilbert. Định lý cơ sở Hilbert cho phép quy mỗi tập đại số về tập nghiệm của hữu hạn đa thức và Định lý không điểm Hilbert là sự tổng quát của Định lý cơ bản của Đại số.

1.1 Đa thức một biến

Định nghĩa 1.1.1. Một *đa thức một biến* với hệ số trên V có thể được viết dưới dạng $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, trong đó $a_0, \ldots, a_n \in V$ và x là một ký hiệu gọi là *biến* (hay *biến không xác định*). Ta cũng viết đa thức này dưới dạng $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ hoặc $f(x) = \sum a_i x^i$, trong đó $a_i = 0$ với mọi $i > n$. Hai đa thức $\sum a_i x^i$ và $\sum b_i x^i$ là *bằng nhau* nếu $a_i = b_i$ với mọi i.

Ký hiệu $V[x]$ là tập các đa thức một biến x với hệ số trên V.

Định nghĩa 1.1.2. Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in V[x]$ là một đa thức.

i) Ta gọi a_0 là *hệ số tự do* của $f(x)$.

ii) Nếu $a_n \neq 0$ thì n được gọi là *bậc* của $f(x)$ và được ký hiệu là $\deg f(x)$. Trong trường hợp này, a_n được gọi là *hệ số cao nhất* của $f(x)$.

iii) Nếu $a_n = 1$ thì $f(x)$ được gọi là *đa thức dạng chuẩn* (monic polynomial).

Chú ý 1.1.1. *i*) Ta không định nghĩa bậc cho đa thức 0.

ii) Nếu $f(x) = a \in V$ thì $f(x)$ được gọi là *đa thức hằng*.

iii) Các đa thức bậc 1 được gọi là *đa thức tuyến tính*.

Định nghĩa 1.1.3. Với hai đa thức $f(x) = \sum a_i x^i$ và $g(x) = \sum b_i x^i$ trong $V[x]$, định nghĩa

$$f(x) + g(x) = \sum (a_i + b_i) x^i,$$

$$f(x).g(x) = \sum c_k x^k,$$

trong đó $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j, \forall k$.

Chú ý 1.1.2. Với các phép toán trên thì $V[x]$ là vành giao hoán.

Định nghĩa 1.1.4. Vành $V[x]$ được gọi là *vành đa thức một biến x với hệ số trong V*. Phần tử không của vành là đa thức 0, phần tử đơn vị là đa thức 1.

Tiếp theo là một số tính chất sau đây về bậc của tổng và tích các đa thức một biến.

Bổ đề 1.1.1. *Cho* $f(x), g(x), h(x) \in V[x]$ *là các đa thức khác* 0*. Khi đó*

(i) Nếu $f(x) + g(x) \neq 0$ *thì*

$$\deg((f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}.$$

(ii) Nếu $f(x)g(x) \neq 0$ *thì*

$$\deg((f(x)g(x)) \leq \deg f(x) + \deg g(x).$$

Định nghĩa 1.1.5. Cho V là vành giao hoán khác 0.

i) V được gọi là *miền nguyên* nếu $ab = 0$ kéo theo $a = 0$ hoặc $b = 0$.

ii) Cho V là miền nguyên. Phần tử $a \in V$ được gọi là *bất khả quy* nếu $a \neq 0$, a không khả nghịch và a không có ước thực sự.

iii) Miền nguyên V được gọi là *miền phân tích duy nhất* (UFD) nếu mọi phần tử khác không, không khả nghịch đều phân tích được thành tích của các nhân tử bất khả quy và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử và các nhân tử khả nghịch.

iv) Miền nguyên V được gọi là *miền iđêan chính* nếu mọi iđêan của V đều là iđêan chính, (tức là: Nếu I là iđêan của V thì tồn tại phần tử $a \in I$ sao cho $I = \{ax \mid x \in V\} = (a)$).

Ví dụ 1.1.1. Ta thấy $\mathbb{Z}$ là miền chính vì mọi iđêan của $\mathbb{Z}$ có dạng $m\mathbb{Z} = \{mx \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Tuy nhiên vành $\mathbb{Z}[x]$ không là miền chính vì iđêan $I = (x, 2)$ không là iđêan chính.

Bổ đề 1.1.2. *Cho* V *là miền nguyên khi đó với mọi* $f(x), g(x) \in V[x]$ *ta có*

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x),$$

với mọi $f(x), g(x) \in V[x], f(x), g(x) \neq 0$.

Mệnh đề dưới đây cho ta điều kiện cần và đủ để vành đa thức là miền phân tích duy nhất, miền iđêan chính (xem Mệnh đề 1.4.2 của [1]).

Mệnh đề 1.1.1. *i) Nếu V là miền phân tích duy nhất thì $V[x]$ là miền phân tích duy nhất.*

ii) Cho V là một miền nguyên. Khi đó $V[x]$ là miền iđêan chính khi và chỉ khi V là một trường.

Định nghĩa 1.1.6. Một ánh xạ $\varphi : V \to V'$ giữa hai vành V, V' được gọi là một *đồng cấu vành* nếu thỏa mãn các điều kiện sau

i) $\varphi(1) = 1$;

ii) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;

iii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

với mọi $a, b \in V$.

Định nghĩa 1.1.7. Một đồng cấu φ được gọi là *đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu)* nếu φ là đơn ánh (toàn ánh, song ánh). Hai vành V và V' được gọi là *đẳng cấu* với nhau, viết $V \cong V'$, nếu có một đẳng cấu giữa chúng.

Chú ý 1.1.3. Chú ý rằng hợp thành của hai đồng cấu vành là một đồng cấu vành, ánh xạ ngược của một đẳng cấu vành là một đẳng cấu vành, ánh xạ nhúng $j : V \to V[x]$ cho bởi $j(a) = a$ với mọi $a \in V$ là một đơn cấu vành. Ta gọi j là *phép nhúng tự nhiên* hay *phép nhúng chính tắc*.

Ví dụ 1.1.2. Ta có ánh xạ $\varphi : V[x] \to V$ cho bởi $\varphi\left(\sum a_i x^i\right) = a_0$ là một toàn cấu và $\ker\varphi = (x)$. Do đó $V[x]/(x) \cong V$.

Định lý dưới đây là một kết quả rất quan trọng trong lý thuyết đa thức. Nó giúp chúng ta xây dựng được thuật toán tìm ước chung lớn nhất của các đa thức (xem Định lý 1.2.2 của [1]).